Tính chất toán tử tích chập của phép biến đổi Fourier và Laplace

Convolution operator properties of the Fourier transformation and the Laplace

Nguyễn Kiều Hiên

Email: nguyenkieuhien@gmail.com

Trường Đại học Sao Đỏ

Ngày nhận bài: 07/10/2020

Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 26/12/2020

Ngày chấp nhận đăng: 31/12/2020

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu tích chập suy rộng liên quan đến phép biến đổi Fourier, phép biến đổi Laplace, đẳng thức nhân tử hóa có chứa hai phép biến đổi tích phân khác nhau. Thiết lập được các đẳng thức nhân tử hóa, đẳng thức kiểu Parseval và một số đánh giá chuẩn trong các không gian hàm cụ thể, sử dụng trong phân giải tín hiệu xử lý thông tin (xem [2]).

Từ khóa: *Biến đổi Fourier; biến đổi Laplace; đẳng thức parseval; tích chập suy rộng.*

Abstract

In this paper, we research generalized convolution related to the Fourier transformation and the Laplace transformation, the factorization equality contains two different integral transformations. Establish the factorization equalitys, Parseval type equalitys and some standard evaluations in specifically function spaces, used in multiresolution analysis information handling (see [2]).

Keywords: *Fourier transformation; laplace transformation; parseval equality; generalized convolution.*

1. GIỚI THIỆU

Tích chập là một phép nhân đặc biệt được định nghĩa thông qua phép biến đổi tích phân tương ứng, thường được đưa vào trong các không gian hàm mà ở đó phép nhân thông thường không tồn tại. Năm 1951, Sneddon I.N. xây dựng tích chập đối với phép biến đổi Fourier. Những tích chập đầu tiên phải kể đến là tích chập Fourier và tích chập Laplace. Sự ra đời của tích chập đã mở ra triển vọng phát triển thêm hướng nghiên cứu về lý thuyết tích chập. Cho đến nay các phép biến đổi tích phân kiểu tích chập suy rộng Fourier và Laplace vẫn chưa được nghiên cứu nhiều. Việc nghiên cứu các tích chập và các phép biến đổi tích phân có ý nghĩa quan trọng trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật. Nhờ đó, các phép toán giải tích phức tạp được đơn giản hóa thành phép tính đại số. Vì vậy, nó đặc biệt hữu ích trong việc giải các bài toán trong lý thuyết mạch, bài toán xử lý hình ảnh và xử lý tín hiệu truyền thông.

Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng một số tích chập suy rộng liên quan đến phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Laplace. Nghiên cứu các tính chất toán tử của các tích chập suy rộng trong một số không gian hàm cụ thể, sử dụng trong phân giải tín hiệu xử lý thông tin.

Người phản biện: 1. PGS. TS. Khuất Văn Ninh
2. TS. Nguyễn Viết Tuân

2. TÍCH CHẬP SUY RỘNG

Trong bài viết này, chúng tôi sử dụng các không gian hàm sau đây:

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.

Cho $L_p(\mathbb{R}_+), 1 \leq p < \infty$ là không gian các hàm số f xác định trên $\mathbb{R}_+$ sao cho.

$$\int_0^\infty |f(x)|^p dx < +\infty$$

Trong đó chuẩn của hàm f được ký hiệu và xác định bởi:

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Cho $L_p(\mathbb{R}_+, \rho), \rho > 0, 1 \leq p < \infty$ là không gian các hàm số f xác định trên $\mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\int_0^\infty |f(x)|^p \rho(x) dx < +\infty$$

Trong đó chuẩn của hàm f được ký hiệu và xác định bởi:

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+,\rho)} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \rho(x)dx\right)^{1/p}$$

Đặc biệt, khi $\rho(x) = x^\alpha e^{-\beta x}$ thì ta nhận được không gian hàm hai tham số α, β và kí hiệu $L_p^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)$.

Cho $L_\infty(\mathbb{R}_+)$ là không gian các hàm số f xác định trên $\mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f(x)| < +\infty$$

Trong đó chuẩn của hàm f được ký hiệu và xác định bởi:

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f(x)|.$$

Cho $C_0(\mathbb{R}_+)$ là không gian các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}_+$ và triệt tiêu ở ∞.

$$H(\mathbb{R}_+) = \{f(x): (Lf)(y) \in L_2(\mathbb{R}_+)\}$$

L là phép biến đổi Laplace.

$$(Lf)(y) = \int_0^\infty f(x)e^{-yx}dx, \mathrm{Re}y > 0$$

F_c là phép biến đổi Fourier cosine.

$$(F_c f)(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos xy dx,\ y > 0.$$

Sau đây, ta đưa ra khái niệm tích chập của hai hàm khả tích trên $\mathbb{R}$ nhằm xác định quy tắc lấy tích chập giữa chúng.

Định nghĩa 1 ([3])

Cho f, k là các hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{R}$. Nếu tích phân $\int_{\mathbb{R}} f(x-y)k(y)\,dy$ xác định với hầu hết $x \in \mathbb{R}$ (nghĩa là tập các giá trị $x \in \mathbb{R}$ để tích phân trên không tồn tại là tập có độ đo không) và hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{R}$ biến x thành $\int_{\mathbb{R}} f(x-y)k(y)\,dy$ được gọi là tích chập của hàm f và hàm k, ký hiệu là $f * k$.

Như vậy

$$(f*k)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)k(y)\,dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(y)k(x-y)\,dy.$$

Ta gọi $f * k$ là tích chập của hàm f và hàm k.

Tiếp theo, ta đưa ra khái niệm tích chập suy rộng với hai phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Laplace.

Định nghĩa 2 ([1])

Tích chập suy rộng của hai hàm f và k đối với hai phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Laplace được định nghĩa như sau:

$$(f*k)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \theta(x,u,v)f(u)k(v)dudv \quad (1)$$

Trong đó:

$$\theta(x,u,v) = \frac{v}{v^2+(x-u)^2} + \frac{v}{v^2+(x+u)^2}, x > 0 \quad (2)$$

Ta gọi A_c là không gian ảnh của $L_1(\mathbb{R}_+)$ thông qua phép biến đổi Fourier cosine F_c. Với chuẩn

$$\|f\|_{A_c} = \|F_c f\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}$$

Thì không gian đó là một đại số Bannach, nghĩa là nếu $f(x), k(x) \in A_c$ thì $f(x), k(x) \in A_c$

Và thỏa mãn

$$\|fk\|_{A_c} \le \|f\|_{A_c}\|k\|_{A_c}.$$

Định nghĩa 3 ([2])

Tích chập suy rộng với hàm $\gamma(y) = e^{-\mu y}, (\mu > 0)$ của hai hàm f và k đối với hai phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Laplace được định nghĩa như sau:

$$\left(f \overset{\mu}{*} k\right)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \theta(x,u,v+\mu)f(u)k(v)dudv \quad (3)$$

Trong đó:

$$\theta(x,u,v) = \frac{v}{v^2+(x-u)^2} + \frac{v}{v^2+(x+u)^2}, x > 0.$$

Định lý sau đây cho ta sự tồn tại của các tích chập và đẳng thức nhân tử hóa của tích chập trong các không gian hàm tương ứng.

Định lý 1 ([1])

Cho hàm $f \in L_p(\mathbb{R}_+), k \in L_q(\mathbb{R}_+)$

Trong đó $1 \le p, q \le \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$. Thì tích chập $f * k \in L_r(\mathbb{R}_+)$.

Ở đây $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

Đồng thời, ta có đánh giá:

$$\|f*k\|_r \le \|f\|_p \|k\|_q.$$

Định lý 2 ([2])

Giả sử các hàm $f(x)$ và $k(x)$ thuộc không gian $L_2(\mathbb{R}_+)$. Khi đó, ta có $(f*k)(x) \in A_c$ và thỏa mãn đẳng thức kiểu Parseval.

$$(f*k)(x)=F_c[(F_cf)(y)(Lk)(y)](x),\forall x>0 \quad (4)$$

Hơn nữa, ta cũng nhận được đẳng thức nhân tử hóa.

$$F(f*k)(x)=(F_cf)(y)(Lk)(y),\forall y>0 \quad (5)$$

Nhận xét 1

Ta dễ thấy rằng $L_2(\mathbb{R}_+)\subset H(\mathbb{R}_+)$. Trong một số trường hợp, việc nghiên cứu tích chập *(f *k)* có thể được nhúng liên tục vào $H(\mathbb{R}_+)$.

Giả sử các hàm $f(x)\in L_2(\mathbb{R}_+)$ và $k(x)\in H(\mathbb{R}_+)$ sao cho tích phân.

$$(f*k)(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \theta(x,u,v)f(u)k(v)$$

Hội tụ như tích phân lặp. Ví dụ, tích chập *(f *k)* tồn tại như tích phân lặp với:

$$k(x)=\cos x\notin L_2(\mathbb{R}_+)$$

Thì $k(x)\in H(\mathbb{R}_+)$ khi đó

$$(Lk)(y)=\frac{y}{y^2+1}\in L_2(\mathbb{R}_+).$$

Hơn nữa, ta có đánh giá

$$\|F_c[(F_cf)(y)(Lk)(y)](x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}$$

$$\le\sqrt{\frac{2}{\pi}}\|(F_cf)(y)(Lk)(y)\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}$$

$$\le\sqrt{\frac{2}{\pi}}\|(F_cf)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\|(Lk)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\|(Lk)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}$$

$$\le\sqrt{2}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\|k\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}.$$

Kết quả của Định lý 2 vẫn đúng với giả thiết này.

Để nghiên cứu tích chập *(f * k)* trong không gian hàm $L_1(\mathbb{R}_+)$ ta xét định lý sau.

Định lý 3 ([4])

Nếu *k(x)* thuộc không gian $L_1(\mathbb{R}_+)$, khi đó

$(Lk)(y)\in A_c$

Định lý 3 là công cụ quan trọng giúp ta chứng minh tích chập *(f * k)* thuộc không gian hàm $L_1(\mathbb{R}_+)$ và trong không gian tương ứng các đẳng thức kiểu Parseval và đẳng thức nhân tử hóa vẫn còn đúng.

Định lý 4 ([2])

Giả sử rằng hàm *f(x)* và *k(x)* thuộc không gian $L_1(\mathbb{R}_+)$. Khi đó đối với tích chập *(f *k) (x)* thỏa mãn đẳng thức kiểu Parseval.

$$(f*k)(x)=F_c[(F_cf)(y)(Lk)(y)](x),\forall x>0.$$

Ta cũng nhận được đẳng thức nhân tử hóa sau:

$$F(f*k)(x)=(F_cf)(y)(Lk)(y),\forall y>0.$$

Hơn nữa:

$$(f*k)(x)\in L_1(\mathbb{R}_+).$$

Việc chứng minh đẳng thức kiểu Parseval (4) và đẳng thức nhân tử hóa (5) là được suy ra từ Định lý 2.

Nếu *k(x)* thuộc không gian $L_1(\mathbb{R}_+)$, thì từ Định lý 3 ta có:

$(Lk)(y)\in A_c$

Từ điều kiện *f(x)* thuộc không gian $L_1(\mathbb{R}_+)$, thì ta cũng nhận được:

$(F_cf)(y)\in A_c$

Vì A_c là một đại số Banach, suy ra:

$$(f*k)(x)\in L_1(\mathbb{R}_+).$$

Định lý sau cho ta sự tồn tại của tích chập $\left(f\overset{\mu}{*}k\right)$ trong không gian hàm $L_1(\mathbb{R}_+)$ và đẳng thức nhân tử hóa của tích chập.

Định lý 5 ([4])

Giả sử *f(x)* và *k(x)* là hai hàm thuộc không gian $L_1(\mathbb{R}_+)$. Khi đó, tích chập suy rộng $\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)$ thuộc không gian $L_1(\mathbb{R}_+)$ thỏa mãn bất đẳng thức chuẩn:

$$\left\|\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}\le\|f\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}\|k\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \quad (6)$$

Và có đẳng thức nhân tử hóa

$$F_c\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(y)=e^{-\mu y}[(F_cf)(y)(Lk)(y)],\forall y>0 \quad (7)$$

Ngoài ra, tích chập suy rộng $\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)$ cũng thuộc không gian $C_0(\mathbb{R}_+)$.

3. TÍCH CHẬP SUY RỘNG FOURIER COSINE - LAPLACE

Ngoài không gian hàm $L_1(\mathbb{R}_+)$, chúng ta có thể mở rộng việc nghiên cứu tích chập $\left(f\overset{\mu}{*}k\right)$ trong không gian hàm $L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)$. Ta chứng minh sự tồn tại của tích chập và đánh giá bất đẳng thức chuẩn trong không gian hàm tương ứng qua bổ đề sau.

Bổ đề 1

Giả sử $p>1$, $r\ge1$, $0<\beta\le1$ các hàm $f(x)\in L_p(\mathbb{R}_+)$ và $k(x)\in L_1(\mathbb{R}_+)$. Khi đó, tích chập suy rộng $\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)$ tồn tại, liên tục và thuộc không gian $L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)$. Hơn nữa, ta có bất đẳng thức chuẩn sau:

$$\left\|\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)\right\|_{L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)}\le C\|f\|_{L_p\mathbb{R}_+)}\|k\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \quad (8)$$

Trong đó

$$C=\left(\frac{2}{\pi\mu}\right)^{1/p}\beta^{-\frac{\alpha+1}{r}}\Gamma^{\frac{1}{r}}(\alpha+1)$$

với Γ là hàm Gamma. Ngoài ra, nếu $f(x)\in L_p(\mathbb{R}_+)\cap L_1(\mathbb{R}_+)$ thì tích chập suy rộng $\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)$ thuộc không gian $C_0(\mathbb{R}_+)$, và thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa:

$$F_c\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(y)=e^{-\mu y}[(F_cf)(y)(Lk)(y)],\forall y>0.$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Hölder cho:

$$\int_0^\infty|\theta(x,u,v+\mu)|dx=$$

$$\int_0^\infty\left|\frac{v+\mu}{(v+\mu)^2+(x-u)^2}+\frac{v+\mu}{(v+\mu)^2+(x+u)^2}\right|dx$$

$$\le\int_{-u}^\infty\frac{v+\mu}{(v+\mu)^2+t^2}dt+\int_u^\infty\frac{v+\mu}{(v+\mu)^2+t^2}dt$$

$$=\int_{-\infty}^\infty\frac{v+\mu}{(v+\mu)^2+t^2}dt=\pi.$$

Với $p>1$ thỏa mãn $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, ta được:

$$\left|\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)\right|\le$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{\mathbb{R}_+^2}|f(u)|^p\theta(x,u,v+\mu)|k(v)|dudv\right]^{1/p}$$

$$\times\left[\int_{\mathbb{R}_+^2}|k(v)|\theta(x,u,v+\mu)dudv\right]^{1/q}$$

$$\le\frac{1}{\pi}\left[\int_{\mathbb{R}_+^2}|f(u)|^p|k(v)|\frac{2}{\mu}dudv\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty|k(v)|\pi dv\right]^{1/q}$$

$$=\left(\frac{2}{\pi\mu}\right)^{1/p}\left[\int_0^\infty|f(u)|^p du\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty|k(v)|dv\right]$$

$$=\left(\frac{2}{\pi\mu}\right)^{1/p}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}\|k\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}<\infty.$$

Vậy tích chập suy rộng $\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)$ tồn tại và liên tục:

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x}\left|\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)\right|^r dx\le C^r\|f\|^r_{L_p(\mathbb{R}_+)}\|k\|^r_{L_1(\mathbb{R}_+)}.$$

Suy ra tích chập suy rộng $\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)$ tồn tại, liên tục và thuộc không gian $L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)$, thỏa mãn bất đẳng thức:

$$\left\|\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)\right\|_{L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)}\le C\|f\|_{L_p\mathbb{R}_+)}\|k\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}.$$

Từ các giả thiết của bổ đề, và áp dụng Định lý 5, ta nhận được đẳng thức nhân tử hóa.

$$F_c\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(y)=e^{-\mu y}[(F_cf)(y)(Lk)(y)],\forall y>0.$$

Kết hợp bổ đề Riemann-Lebesgue cho phép biến đổi Fourier cosine, ta có.

$$\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)\in C_0(\mathbb{R}_+).$$

Bổ đề được chứng minh.

Định lý sau đưa ra cách tiếp cận mới và phương pháp giải phương trình vi - tích phân, phương trình đạo hàm riêng thường xuất hiện trong bài toán xử lý ảnh và xử lý tín hiệu.

Định lý 6

Giả sử $\alpha>-1$, $0<\beta\le 1$, $p>1$, $q>1$, $r\ge 1$, thỏa mãn $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Nếu $f(x)\in L_p(\mathbb{R}_+)$ và $k(x)\in L_q(\mathbb{R}_+,(1+x^2)^{q-1})$, thì tích chập suy rộng $\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)$ tồn tại, liên tục, bị chặn trong không gian $L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)$ và có đánh giá chuẩn.

$$\left\|\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)\right\|_{L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)}$$

$$\le C\|f\|_{L_p\mathbb{R}_+)}\|k\|_{L_q(\mathbb{R}_+,(1+x^2)^{q-1})}$$

Trong đó

$$C=(\mu)^{-1/p}(\pi)^{-1/q}\beta^{-\frac{\alpha+1}{r}}\Gamma^{\frac{1}{r}}(\alpha+1)$$

Với Γ là hàm Gamma. Hơn nữa, nếu giả thiết thêm các hàm $f(x)\in L_p(\mathbb{R}_+)\cap L_1(\mathbb{R}_+)$ và $k(x)\in L_1(\mathbb{R}_+)\cap L_q(\mathbb{R}_+,(1+x^2)^{q-1})$, thì tích chập suy rộng $\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)$ thuộc không gian $C_0(\mathbb{R}_+)$, và thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa (7).

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Hölder cho:

$$\int_0^\infty|\theta(x,u,v+\mu)|dx=$$

$$\int_0^\infty\left|\frac{v+\mu}{(v+\mu)^2+(x-u)^2}+\frac{v+\mu}{(v+\mu)^2+(x+u)^2}\right|dx$$

$$\le\int_{-u}^\infty\frac{v+\mu}{(v+\mu)^2+t^2}dt+\int_u^\infty\frac{v+\mu}{(v+\mu)^2+t^2}dt$$

$$=\int_{-\infty}^\infty\frac{v+\mu}{(v+\mu)^2+t^2}dt=\pi.$$

Với $p,q>1$ thỏa mãn $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, ta được:

$$\left|\left(f \overset{\mu}{*} k\right)(x)\right| \le$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{\mathbb{R}_+^2} |f(u)|^p \theta(x,u,v+\mu)\frac{1}{1+v^2}dudv\right]^{1/p}$$

$$\times\left[\int_{\mathbb{R}_+^2}|k(v)|^q \theta(x,u,v+\mu)\left(\frac{1}{1+v^2}\right)^{1-q}dudv\right]^{1/q}$$

$$\le \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty |f(u)|^p du \int_0^\infty \frac{2}{\mu}\frac{1}{1+v^2}dv\right]^{1/p}$$

$$\times\left[\int_0^\infty |k(v)|^q \left(1+v^2\right)^{q-1}dv\right]^{1/q}$$

$$= \mu^{\frac{-1}{p}}\pi^{\frac{-1}{q}}\left[\int_0^\infty|f(u)|^p du\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty |k(v)|^q\left(1+v^2\right)^{q-1}dv\right]^{1/q}$$

$$= \mu^{\frac{-1}{p}}\pi^{\frac{-1}{q}}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}\|k\|_{L_q(\mathbb{R}_+,(1+x^2)^{q-1})} < \infty.$$

Vậy tích chập suy rộng $\left(f \overset{\mu}{*} k\right)(x)$ tồn tại và liên tục, ta đạt được:

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x}\left|\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)\right|^r dx$$

$$\le C^r\|f\|^r_{L_p(\mathbb{R}_+)}\|k\|^r_{L_q(\mathbb{R}_+,(1+x^2)^{q-1})}.$$

Từ Bổ đề suy ra tích chập suy rộng $\left(f \overset{\mu}{*} k\right)(x)$ tồn tại, liên tục và thuộc không gian hàm hai tham số $L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)$ và thỏa mãn bất đẳng thức (9).

$$\left\|\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(x)\right\|_{L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)} \le C\|f\|_{L_p\mathbb{R}_+)}\|k\|_{L_q(\mathbb{R}_+,(1+x^2)^{q-1})}.$$

Từ các giả thiết của định lý và áp dụng Định lý 5, ta nhận được đẳng thức nhân tử hóa (7).

$$F_c\left(f\overset{\mu}{*}k\right)(y) = e^{-\mu y}\left[\left(F_c f\right)(y)\left(Lk\right)(y)\right], \forall y > 0.$$

Kết hợp bổ đề Riemann-Lebesgue cho phép biến đổi Fourier cosine, ta nhận được.

$$\left(f \overset{\mu}{*} k\right)(x) \in C_0(\mathbb{R}_+).$$

Định lý được chứng minh.

4. KẾT LUẬN

Bài viết trình bày sự tồn tại một số tích chập suy rộng liên quan đến phép biến đổi tích phân Fourier cosine và tích phân Laplace. Đưa ra các tính chất toán tử của các tích chập suy rộng trong một số không gian hàm cụ thể. Ngoài ra còn thiết lập và chứng minh các bất đẳng thức kiểu Young đối với các tích chập tương ứng. Tuy nhiên, do khuôn khổ bài báo, chúng tôi không đề cập ở đây.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Anders Vretblad (2003), *Fourier analysis and its applications*, SpingerVerlag, New York.

[2] Elias M. Stein and Rami Shakarchi (2003), *Fourier analysis an introduction*, Princeton university Press, Princeton and Oxford.

[3] Sneddon I.N (2001), *Fourier Transforms*, McGray-Hill, New York.

[4] Schiff J.L (1999), *The Laplace Transforms: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, Inc.

THÔNG TIN VỀ TÁC GIẢ

Nguyễn Kiều Hiên

- Tóm tắt quá trình đào tạo, nghiên cứu (thời điểm tốt nghiệp và chương trình đào tạo, nghiên cứu):

+ Năm 2007: Tốt nghiệp Đại học chuyên ngành Toán học khoa Khoa học Tự Nhiên, Trường Đại học Thái Nguyên.

+ Năm 2014: Tốt nghiệp Thạc sĩ ngành Toán Giải Tích, Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội.

- Tóm tắt công việc hiện tại: Giảng viên, khoa Khoa học Cơ Bản, Trường Đại học Sao Đỏ.

- Lĩnh vực quan tâm: Toán giải tích.

- Email: nguyenkieuhien@gmail.com.

- Điện thoại: 0985330644.